Wronski-determináns

Tekintsük a valós függvények vektorterének azt az alterét, melyet a legalább $(n-1)$-szer differenciálható függvények alkotnak. Az ezen altérbeli $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ függvényekből felépített

$$\det W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots \ddots \vdots & & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

determinánst Wronski-determinánsnak nevezzük.

A Wronki-determináns értéke és a függvények lineáris függősége illetve függetlensége között kapcsolat van.

1. Tétel. *Legyenek az $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ függvények lineárisan összefüggők. Ekkor* $\det W(x) = 0$ *minden x-re.*

Bizonyítás.
Az $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ függvények lineárisan függők, azaz léteznek $c_1, c_2, \dots, c_n$ nem mind 0 együtthatók, hogy $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$. Ezt az egyenletet és 1-szeres, 2-szeres, …, $(n-1)$-szeres deriváltját véve a

$$\begin{aligned} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) &= 0, \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \dots + c_n f_n'(x) &= 0, \\ &\vdots \\ c_1 f_1^{(n-1)}(x) + c_2 f_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n f_n^{(n-1)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert kapjuk. Megtanultuk, hogy egy homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha az ismeretlenek együtthatóiból álló mátrix determinánsa eltűnik. Ebben az esetben ez a determináns éppen a Wronski-determináns, azaz $\det W(x) \equiv 0$. □

2. Tétel. *Legyenek az $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ függvények valamely I intervallumon értelmezve. Ekkora, ha a* $\det W(x)$ *determináns I legalább egy pontjában nem nulla, akkor a függvények az I intervallumon lineárisan független rendszert alkotnak.*

Bizonyítás.
Legyen $x_0 \in I$, melyre $\det W(x_0) \neq 0$. Ha valamely $c_1, c_2, \dots, c_n$ együtthatókra $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$ minden x-re, akkor speciálisan $x = x_0$-t tekintve:

$$\begin{aligned} c_1 f_1(x_0) + c_2 f_2(x_0) + \dots + c_n f_n(x_0) &= 0, \\ c_1 f_1'(x_0) + c_2 f_2'(x_0) + \dots + c_n f_n'(x_0) &= 0, \\ &\vdots \\ c_1 f_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 f_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n f_n^{(n-1)}(x_0) &= 0. \end{aligned}$$

Vagyis a $\vec{c}$ oszlopvektor megoldása a fenti $W(x_0)\vec{y} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek. Lévén $\det W(x_0) \neq 0$, így szükségképpen $\vec{c} = 0$, azaz az $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ függvények lineárisan függők. □

A Gyémánt-Görbe jegyzet 118. oldalán lévő állítással ellentétben az viszont nem igaz, hogy $\det W(x) \equiv 0$ esetén az $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ függvények lineárisan összefüggőek. Ez csak egy

elterjedt tévhit, pedig Peano már 1889-ben rámutatott ezen állítás helytelenségére. A Wronski-determináns eltűnése mellett további feltételek szükségesek a lineáris összefüggőséghez. Peano például azt találta, hogyha a vizsgált függvények analitikusak (lokálisan Taylor-sorba fejthetők), akkor már a$\det W(x) \equiv 0$-ból következik a függvények lineáris függése. Mára rengeteg ilyen feltétel ismert, sőt már Bocher is számos kritériumot ismertetett 1901-ben.
A jegyzetben szereplő helytelen állítás megcáfolására tekintsük a Peano által felhozott ellenpéldát. Legyenek $f_1(x) = x^2$ és $f_2(x) = |x|x$ függvények. Ezek (legalább) egyszer folytonosan differenciálhatók, a belőlük felépített Wronski-determináns:

$$\det W(x) = \begin{cases} \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \\ 2x & 2x \end{vmatrix} & \text{ha } x \geq 0 \\ \\ \begin{vmatrix} x^2 & -x^2 \\ -2x & -2x \end{vmatrix} & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Vagyis, $\det W(x) \equiv 0$, viszont a $c_1x^2 + c_2|x|x = 0$ egyenletből $\frac{c_2}{c_1} = -\frac{x}{|x|} = -1$, ha $x > 0$ és $\frac{c_2}{c_1} = -\frac{x}{|x|} = 1$, ha $x < 0$, vagyis a 0-t tartalmazó bármely intervallumon annak nincs megoldása, tehát x^2 és $|x|$ lineárisan függetlenek.

Összefoglalva, ha az $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ függvények lineárisan függők, akkor $\det W(x) \equiv 0$. Ellenben, ha $\det W(x) \equiv 0$, attól még az $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ függvények nem feltétlen lineárisan függők.