Jordan-féle normálalak

Megtanultuk, hogy bármely $V \to V$ lineáris transzformációt egy mátrixszal reprezentálhatunk, melynek alakja függ a V vektortérbeli bázis megválasztásától. Láttuk azt is, hogy amennyiben egy lineáris transzformáció sajátvektorai bázist alkotnak V-ben, akkor ebben a bázisban ezen transzformáció mátrixa diagonális, a főátlóban a sajátértékekkel.
Azonban, az olyan $n \times n$-es lineáris transzformációkat, melyek sajátalterei dimenzióinak összege nem n, azaz nincs n db lineárisan független sajátvektoruk, így sajátbázisuk sem, nem lehet diagonális alakra hozni. Mégis, a bázis alkalmas megválasztásával az ilyen lineáris transzformációk mátrixa olyan formát ölthet, ahol (legfeljebb) a főátlóban és az alatta levő "átlóban" vannak 0-tól különböző elemek. Ezt a "majdnem" diagonális mátrixot nevezzük a vizsgált transzformáció Jordan-féle normálalakjának. Tehát, egy A mátrix Jordan-féle normálalakja egy A-hoz hasonló, diagonálishoz "legközelebb" álló mátrix, azaz $\exists S$ invertálható mátrix, hogy $J = S^{-1}AS$, ahol J a Jordan-féle normálalak.
Természetesen, ha egy lineáris transzformáció sajátvektorai bázist alkotnak, akkor ennek Jordan-féle normálalakja diagonális mátrix lesz, főátlóban a sajátértékekkel.

1. Tétel. ***(Jordan)***
Legyen V egy $\mathbb{C}$ feletti véges n dimenziós vektortér és $\mathcal{A} : V \to V$ egy lineáris transzformáció, melynek karakterisztikus polinomja $k_{\mathcal{A}}(x) = (x-\lambda_1)^{\mu_1}(x-\lambda_2)^{\mu_2}\dots(x-\lambda_l)^{\mu_l}$, míg minimálpolinomja $m_{\mathcal{A}}(x) = (x-\lambda_1)^{k_1}(x-\lambda_2)^{k_2}\dots(x-\lambda_l)^{k_l}$. Ekkor V-ben található olyan bázis, melyben $\mathcal{A}$ mátrixa A_i blokkokból áll, ahol $i = 1, 2, \dots, l$, egy-egy A_i blokk pedig A_{ij} alblokkokból épül fel, melyek közül a legnagyobb mérete (rögzített i-re) k_i. Az A_{ij} $j = 1, 2, \dots, m_i$ alblokkok főátlójában minden elem λ_i, az alatt lévő átlóban minden elem 1, míg az összes többi elem 0.

$$[\mathcal{A}] = J = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_l \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$$A_i = \begin{pmatrix} A_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{im_i} \end{pmatrix}_{\mu_i\times\mu_i} \qquad A_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{s_{ij}\times s_{ij}}$$

Megjegyzések.

- Világos, hogy $\sum_{i=1}^{l} \mu_i = n$.

- λ_i geometriai multiplicitása a λ_i-hez tartozó Jordan-alblokkok száma, vagyis m_i, ami megegyezik a λ_i sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenziójával.

- λ_i algebrai multiplicitása a λ_i-hez tartozó Jordan-alblokkok méretének összege, azaz A_i mérete, vagyis $\sum_{j=1}^{m_i} s_{ij} = \mu_i$.

- Egy komplex mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha minden λ_i sajátértékének geometria és algebrai multiplicitása megegyezik.

- A Jordan-féle normálalak egyértelmű (a blokkok és alblokkok permutációjának erejéig).